

Los sólidos platónicos y la proporción áurea (I). Relaciones y series

J. Romañach, M. Toboso – Mayo 2016

1 Los sólidos platónicos

El grupo de cinco poliedros convexos regulares que hoy día conocemos como los sólidos platónicos está formado por el tetraedro (cuatro caras, que son triángulos equiláteros), el hexaedro o cubo (seis caras, que son cuadrados), el octaedro (ocho caras, que son triángulos equiláteros), el dodecaedro (12 caras, que son pentágonos) y el icosaedro (20 caras, que son triángulos equiláteros).

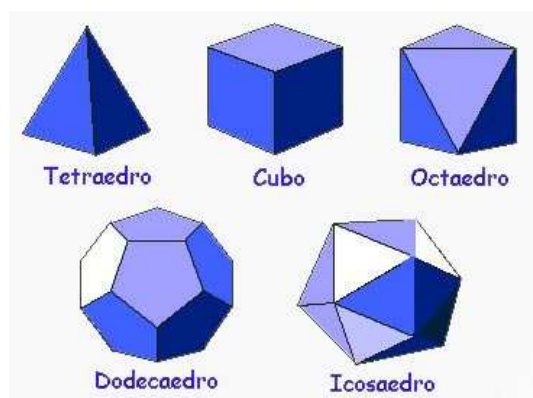


Fig. 1.1 - Los cinco sólidos platónicos

Desde el punto de vista geométrico, los sólidos platónicos tienen muchas propiedades, entre las que podemos destacar que todas las caras de un sólido platónico son polígonos regulares iguales; en todos los vértices de un sólido platónico concurren el mismo número de caras y de aristas; y todas las aristas de un sólido platónico tienen la misma longitud. Además los sólidos platónicos son fuertemente simétricos.

Existen varias magnitudes con las que podemos caracterizar los sólidos platónicos, que toman un valor fijo independientemente de su tamaño, que se muestran en la siguiente tabla.

Poliedro	Octaedro	Tetraedros	Hexaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Caras	8	4+4	6	12	20
Vértices	6	4+4	8	20	12
Caras en cada vértice	4	3	3	3	5
Vértices en cada cara	3	3	4	5	3
Nº Aristas	12	6+6	12	30	30
A - Ángulo diedro	109,47	70,53	90	116,57	138,19
Tangente(A/2)	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/2$	1	φ	φ^2

Tabla 1.1 – Características comunes a todos los sólidos platónicos, independientemente de su tamaño

Como se puede ver en la Tabla 1.1, la tangente de la mitad del ángulo diedro del dodecaedro y el icosaedro valen φ y φ^2 , siendo φ la proporción áurea, cuyo valor es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Este es un claro indicador de la estrecha relación que existe entre ambos poliedros regulares y la proporción áurea.

Los cinco sólidos platónicos pueden inscribirse en una esfera, de radio igual a 1, por ejemplo, de manera que generan compartimentos del mismo tamaño en su interior.

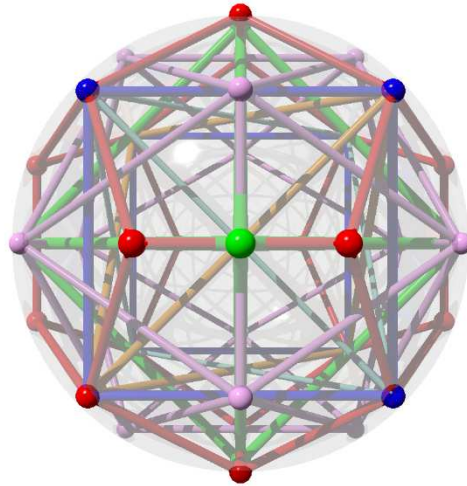


Fig. 1.2. – Los cinco sólidos platónicos. Caso en que todos se inscriben en una esfera de radio 1

Además de las características expresadas en la tabla 1.1, que no dependían del tamaño de los sólidos platónicos, existen otras que sí dependen de su tamaño, y de cómo el tamaño de cada uno de ellos se relaciona con los otros. Veamos el caso anterior en que todos se inscriben en una esfera de radio 1, como en la figura 1.2.

Poliedro	Octaedro	Tetraedros	Hexaedro	Dodecaedro	Icosaedro
Long. Arista (L)	$2/\sqrt{2}$	$4/\sqrt{6}$	$2/\sqrt{3}$	$4/(\sqrt{6}\sqrt{3} + \sqrt{5})$	$\frac{2}{\sqrt{\varphi\sqrt{5}}}$
L / L. Octaedro	1	$2/\sqrt{3}$	$\sqrt{2}/\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}/(\sqrt{6}\sqrt{3} + \sqrt{5})$	$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\varphi\sqrt{5}}}$
Arista*Tan(A/2)	2	$2/\sqrt{3}$	$2/\sqrt{3}$	$4\varphi/\sqrt{3}$	$\frac{2\varphi^2}{\sqrt{\varphi\sqrt{5}}}$

Tabla 1.2 – Características específicas de los sólidos platónicos. Caso en que todos se inscriben en una esfera de radio 1

2 Los sólidos platónicos y la proporción áurea

El dodecaedro y el icosaedro son los sólidos platónicos más vinculados a la proporción áurea, y la proporción áurea los vincula entre ellos.

El dodecaedro y el icosaedro son poliedros duales. En geometría, un poliedro dual o conjugado es el poliedro cuyos vértices se corresponden con el centro de las caras del otro poliedro dado.

El dodecaedro está relacionado con la proporción áurea porque sus doce caras son pentágonos, polígonos vinculados al número φ (phi)¹. Por su parte, las caras del icosaedro son triángulos equiláteros, sin embargo, algunas de sus proyecciones en dos dimensiones, o más bien alguna de sus vistas, dan lugar también a un pentágono. Los 5 triángulos del casquete inferior y superior del dodecaedro se disponen de forma de pirámide pentagonal.

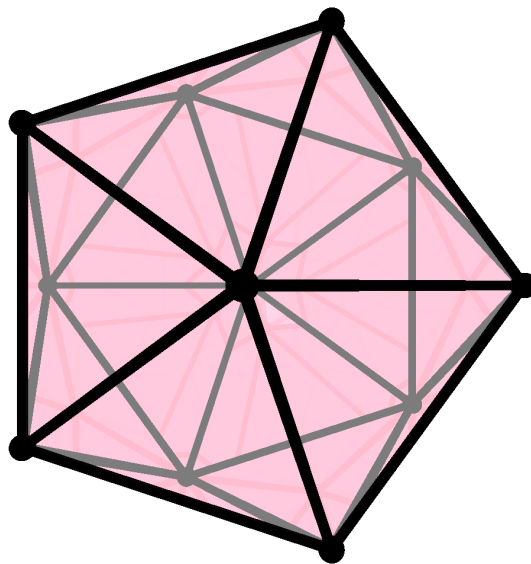


Fig. 2. 1. – Vista pentagonal de un icosaedro.

¹ Usaremos indistintamente los símbolos φ y Φ para representar el número phi.

3 Vértices áureos

3.1 VÉRTICES DEL ICOSAEDRO

Si elegimos de una cierta manera las coordenadas tridimensionales de los 12 vértices de un icosaedro y los 20 vértices de un dodecaedro, sus valores están inundados de proporciones áureas, siendo muy notable en ellas la presencia del número Φ .

Veamos el ejemplo de un icosaedro cuya arista mide $2/\varphi$, en el que podemos observar que la proporción $1/\varphi$ aparece una vez y sólo una vez en cada uno de los 12 puntos:

Punto	X	Y	Z
P1	0	$1/\Phi$	-1
P2	$1/\Phi$	1	0
P3	$-1/\Phi$	1	0
P4	0	$1/\Phi$	1
P5	0	$-1/\Phi$	1
P6	-1	0	$1/\Phi$
P7	1	0	$1/\Phi$
P8	0	$-1/\Phi$	-1
P9	1	0	$-1/\Phi$
P10	-1	0	$-1/\Phi$
P11	$1/\Phi$	-1	0
P12	$-1/\Phi$	-1	0

Tabla 3.1. Vértices áureos del icosaedro de arista $2/\Phi$

Se puede observar la disposición de los vértices y sus coordenadas en la siguiente figura:

$$\text{Lado Icosaedro} = 1.23606798 = 2/\Phi$$

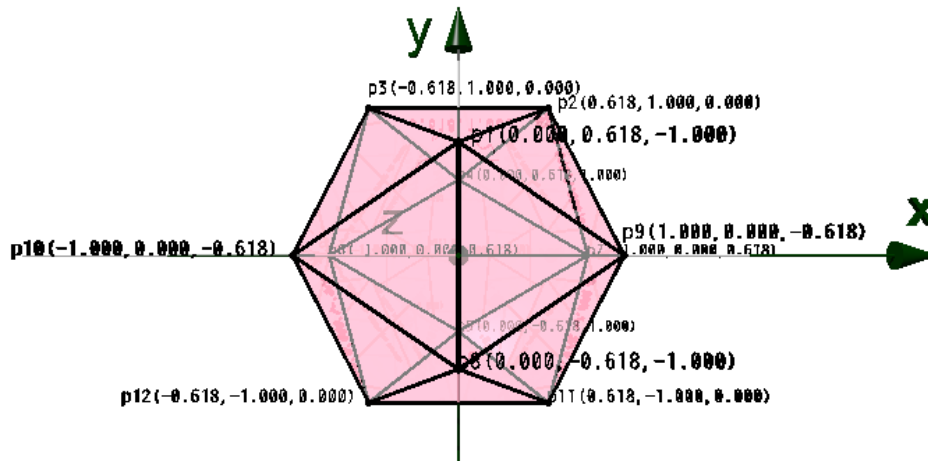


Fig. 3.1 – Vértices y coordenadas de un icosaedro de arista $2/\Phi$

3.2 VÉRTICES DEL DODECAEDRO

El dodecaedro tiene 20 vértices, y en el caso de una disposición concreta con aristas de $2/\Phi^2$, los valores de las coordenadas de esos 20 puntos son:

Punto	X	Y	Z
P1	$1/\Phi^2$	0	1
P2	$-1/\Phi^2$	0	1
P3	$-1/\Phi$	$1/\Phi$	$1/\Phi$
P4	0	1	$1/\Phi^2$
P5	$1/\Phi$	$1/\Phi$	$1/\Phi$
P6	0	-1	$1/\Phi^2$
P7	$1/\Phi$	$-1/\Phi$	$1/\Phi$
P8	$-1/\Phi$	$-1/\Phi$	$1/\Phi$
P9	$1/\Phi^2$	0	-1
P10	$-1/\Phi^2$	0	-1
P11	$-1/\Phi$	$-1/\Phi$	$-1/\Phi$
P12	0	-1	$-1/\Phi^2$
P13	$1/\Phi$	$-1/\Phi$	$-1/\Phi$
P14	$1/\Phi$	$1/\Phi$	$-1/\Phi$
P15	0	1	$-1/\Phi^2$
P16	$-1/\Phi$	$1/\Phi$	$-1/\Phi$
P17	1	$1/\Phi^2$	0
P18	-1	$1/\Phi^2$	0
P19	-1	$-1/\Phi^2$	0
P20	1	$1/\Phi^2$	0

Tabla 3.2. Vértices áureos del dodecaedro de arista $2/\Phi^2$

Se puede observar la disposición de los vértices y sus coordenadas en la siguiente figura:

$$\text{Lado Dodecaedro} = 0.76393202 = 2/\Phi^2$$

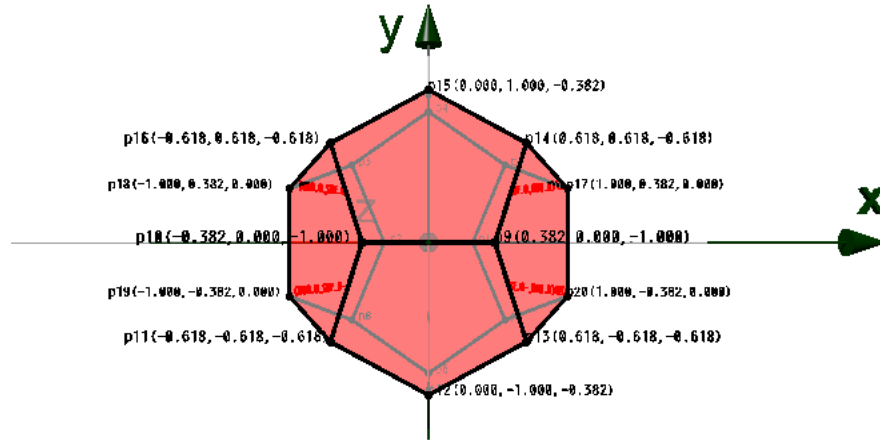


Fig. 3.2 – Vértices y coordenadas de un dodecaedro de arista $2/\Phi^2$

3.3 VÉRTICES DEL HEXAEDRO O CUBO

De los 20 vértices del dodecaedro, 8 establecen también la estructura de un hexaedro o cubo de arista $2/\Phi$:

Punto	X	Y	Z
P3	$-1/\Phi$	$1/\Phi$	$1/\Phi$
P5	$1/\Phi$	$1/\Phi$	$1/\Phi$
P7	$1/\Phi$	$-1/\Phi$	$1/\Phi$
P8	$-1/\Phi$	$-1/\Phi$	$1/\Phi$
P11	$-1/\Phi$	$-1/\Phi$	$-1/\Phi$
P13	$1/\Phi$	$-1/\Phi$	$-1/\Phi$
P14	$1/\Phi$	$1/\Phi$	$-1/\Phi$
P16	$-1/\Phi$	$1/\Phi$	$-1/\Phi$

Tabla 3.3. Vértices áureos del hexaedro de arista $2/\Phi$

De esta manera vinculamos también el hexaedro a la proporción áurea.

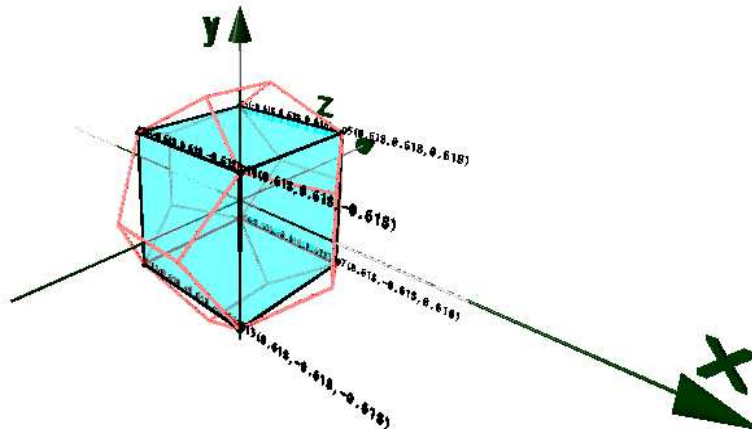


Fig. 3.3 – Vértices y coordenadas de un hexaedro o cubo de arista $2/\Phi$ inscrito en un dodecaedro de arista $2/\Phi^2$

3.4 VÉRTICES DE LOS TETRAEDROS

Los mismos vértices del hexaedro sirven para definir dos tetraedros conjugados de lado $2\sqrt{2}/\Phi$.

El primero con los vértices:

Punto	X	Y	Z
P3	$-1/\Phi$	$1/\Phi$	$1/\Phi$
P7	$1/\Phi$	$-1/\Phi$	$1/\Phi$
P11	$-1/\Phi$	$-1/\Phi$	$-1/\Phi$
P14	$1/\Phi$	$1/\Phi$	$-1/\Phi$

Tabla 3.4. Vértices áureos del primer tetraedro de arista $2\sqrt{2}/\Phi$

Como se puede ver en la siguiente figura.

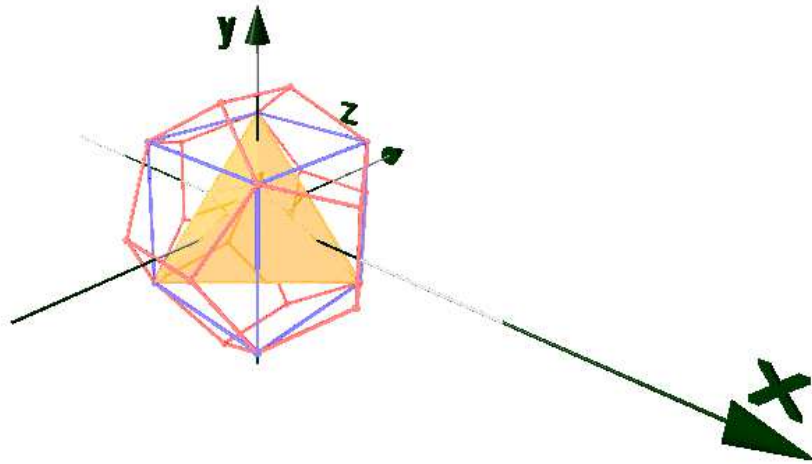


Fig. 3.4 – Vértices y coordenadas del primer tetraedro de arista $2\sqrt{2}/\Phi$ inscrito en un dodecaedro de arista $2/\Phi^2$

Y el segundo tiene los vértices:

Punto	X	Y	Z
P5	$1/\Phi$	$1/\Phi$	$1/\Phi$
P8	$-1/\Phi$	$-1/\Phi$	$1/\Phi$
P13	$1/\Phi$	$-1/\Phi$	$-1/\Phi$
P16	$-1/\Phi$	$1/\Phi$	$-1/\Phi$

Tabla 3.5. Vértices áureos del segundo tetraedro de arista $2\sqrt{2}/\Phi$

Como se puede ver en la siguiente figura

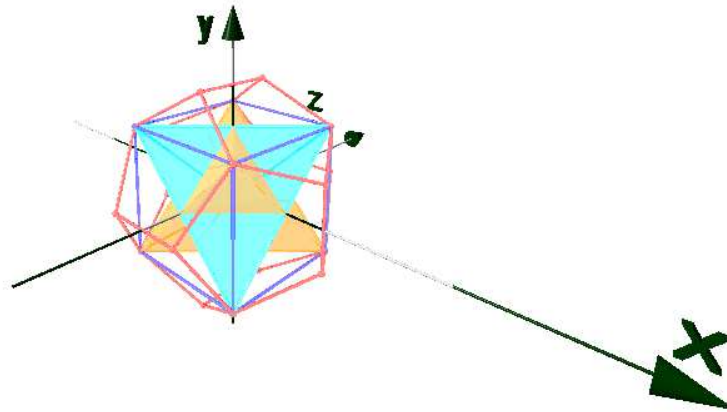


Fig. 3.5 – Vértices y coordenadas del segundo tetraedro de arista $2\sqrt{2}/\Phi$ inscrito en un dodecaedro de arista $2/\Phi^2$

3.5 VÉRTICES DEL OCTAEDRO

Y a partir de los vértices del hexaedro podemos calcular las coordenadas de los puntos del octaedro resultante de su intersección, cuyas aristas miden $\sqrt{2}/\Phi$

Las coordenadas de los 6 vértices del octaedro no se corresponden con ninguna de los de las figuras anteriores, pero siguen teniendo la proporción áurea como magnitud básica.

Punto	X	Y	Z
P1	0	0	$-1/\Phi$
P2	$1/\Phi$	0	0
P3	0	$1/\Phi$	0
P4	$-1/\Phi$	0	0
P5	0	$-1/\Phi$	0
P6	0	0	$1/\Phi$

Tabla 3.6. Vértices áureos del octaedro de arista $\sqrt{2}/\Phi$

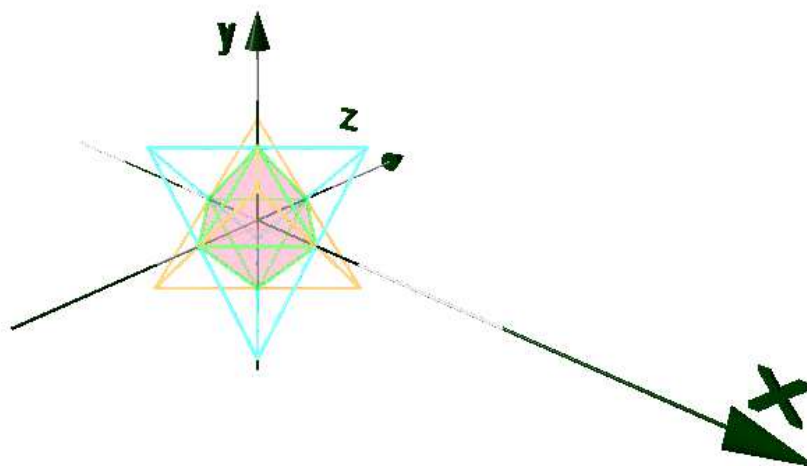


Fig. 2.6 – Octaedro de arista $\sqrt{2}/\Phi$ intersección los dos tetraedros de arista de arista $2\sqrt{2}/\Phi$

4 Estructuras áureas

Por otro lado, usando los mismos vértices, podemos construir las estructuras áureas que les dan soporte usando sólo tres segmentos, cuyas longitudes están en proporción áurea. Estos segmentos tendrán longitudes 1 , $1/\Phi$, $1/\Phi^2$.

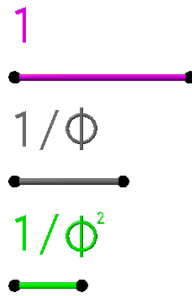


Fig. 4. 1. – Segmentos áureos para la construcción áurea de los sólidos platónicos

4.1 ESTRUCTURA ÁUREA DEL OCTAEDRO

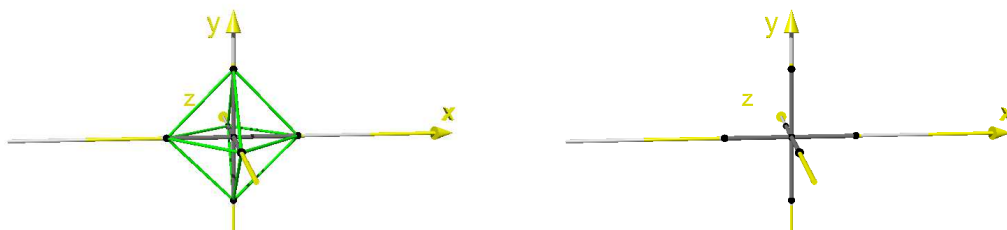


Fig. 4. 2. – Segmentos áureos para la construcción áurea del octaedro

La estructura áurea del octaedro se construye a partir de un segmento de longitud $1/\Phi$.

4.2 ESTRUCTURA ÁREA DEL HEXAEDRO

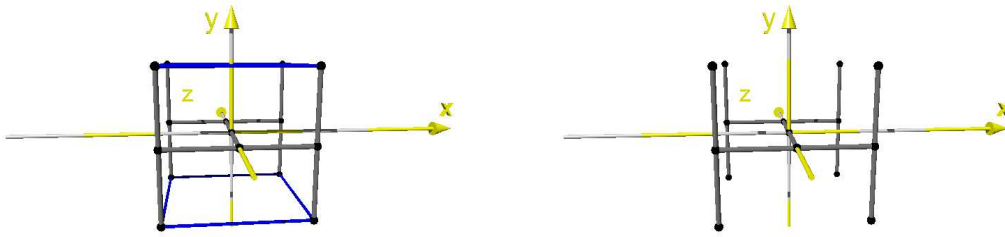
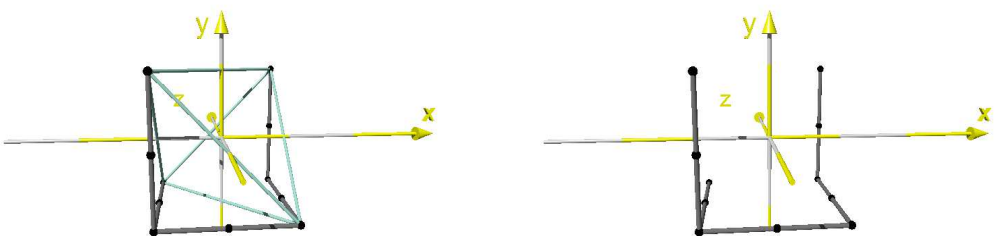
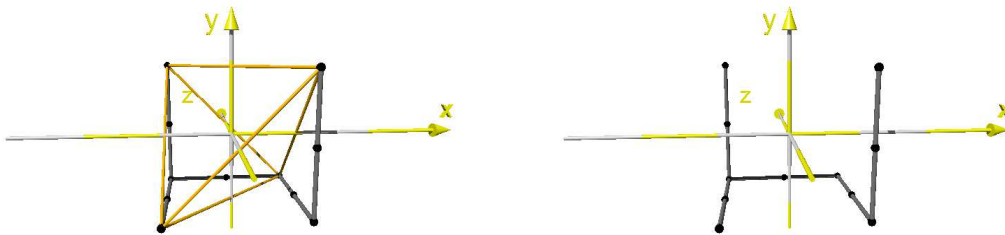


Fig. 4. 3. – Segmentos áureos para la construcción área del hexaedro

La estructura área del hexaedro se construye a partir de un segmento de longitud $1/\Phi$.

4.3 ESTRUCTURA ÁREA DE LOS TETRAEDROS



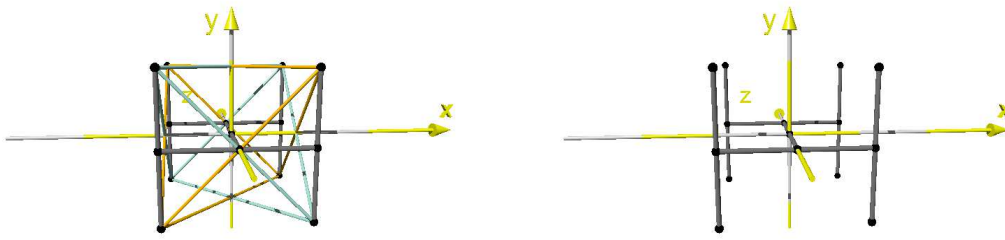


Fig. 4. 4. – Segmentos áureos para la construcción áurea de los tetraedros

La estructura áurea de los tetraedros se construye a partir de un segmento de longitud $1/\Phi$.

4.4 ESTRUCTURA ÁUREA DEL DODECAEDRO



Fig. 4. 5. – Segmentos áureos para la construcción áurea del dodecaedro

La estructura áurea del dodecaedro se construye a partir de segmentos de longitudes $1/\Phi^2$, $1/\Phi$ y 1.

4.5 ESTRUCTURA ÁUREA DEL ICOSAEDRO



Fig. 4. 6. – Segmentos áureos para la construcción áurea del icosaedro

La estructura áurea del icosaedro se construye a partir de segmento de longitudes $1/\Phi$ y 1 .

4.6 TODAS LAS ESTRUCTURAS ÁUREAS

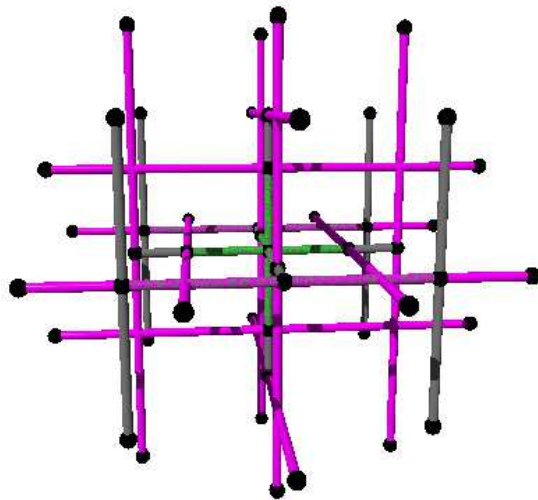


Fig. 4.7 – Todas las estructuras áureas

La estructura áurea de todos los sólidos platónicos se construye a partir de segmentos de longitudes $1/\Phi^2$, $1/\Phi$ y 1 .

5 Relaciones áureas entre parejas de sólidos platónicos

En las siguientes secciones expondremos diferentes ejemplos de relaciones entre parejas de sólidos platónicos en la que se hace evidente la presencia del número Φ , o proporción áurea, entre la longitud de sus respectivas aristas.

Estas relaciones nos servirán como base para plantear las series de sólidos platónicos de las secciones siguientes del documento.

1. PRIMERA RELACIÓN ÁUREA DODECAEDRO - ICOSAEDRO (ARISTA - ARISTA)

La primera relación áurea que planteamos entre el dodecaedro y el icosaedro se obtiene de una manera muy sencilla. Tomamos un ejemplo de ambos poliedros y los componemos de forma tal que sus 30 aristas se intersecten mutuamente por sus puntos medios. En esta configuración particular la longitud de la arista del icosaedro es igual a la longitud de la arista del dodecaedro multiplicada por Φ .

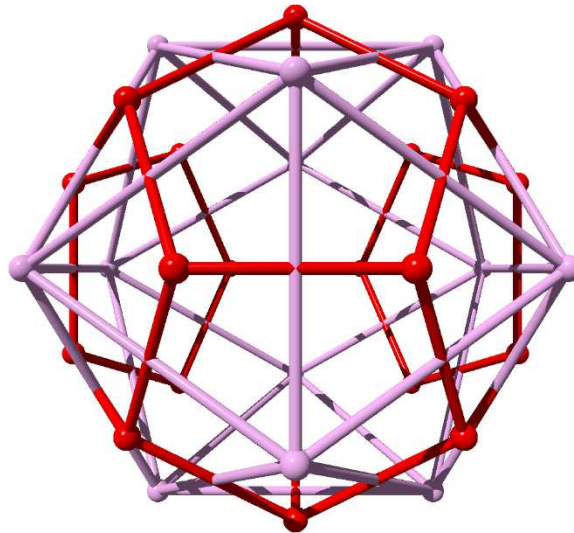
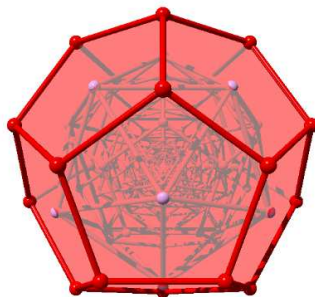
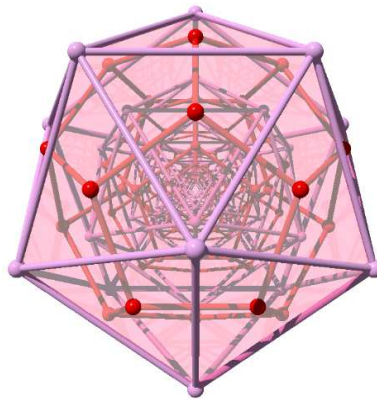


Fig. 5.1 – Primera relación áurea entre el dodecaedro y el icosaedro

Esta relación se puede construir con las estructuras áureas descritas en la sección anterior.

2. SEGUNDA RELACIÓN ÁUREA (DUALIDAD) DODECAEDRO - ICOSAEDRO (VÉRTICE - CARA)

También existe una segunda relación áurea entre el dodecaedro y el icosaedro, conocida como dualidad, en la cual se inscriben el uno en el otro, de manera tal que los vértices de uno tocan los centros de las caras del otro. Esta es una relación que puede prolongarse en la forma de una repetición infinita hacia el interior y el exterior de ambos sólidos.



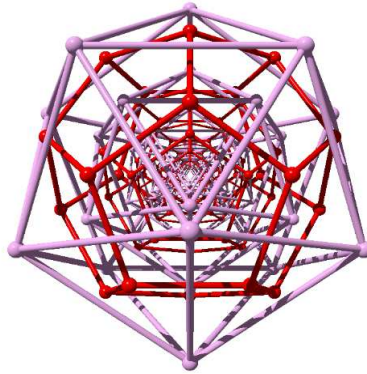


Fig. 5. 2. Segunda relación áurea – Los vértices del icosaedro inciden en los centros de las caras del dodecaedro, y luego a la inversa, infinitas veces.

Lo característico de esta relación es que al movernos hacia el “interior”, el salto de un poliedro al siguiente de la misma clase, hace que la longitud de la arista del primero se reduzca en un factor Φ .

Este factor es la combinación de los factores de reducción ligados al paso del dodecaedro al icosaedro interior, $3/\Phi^2$, y del icosaedro al dodecaedro interior siguiente, $\Phi/3$, de manera que el factor de reducción de dodecaedro (o icosaedro) a dodecaedro (o icosaedro) interior será $1/\Phi$ ($= 3/\Phi^2 \times \Phi/3$).

Inversamente, cuando nos movemos hacia el “exterior” la longitud de la arista al saltar de un poliedro al siguiente de la misma clase aumenta en un factor Φ .

3. PRIMERA RELACIÓN ÁUREA HEXAEDRO – DODECAEDRO (ARISTA-CARA)

Tomemos en consideración, nuevamente, la figura 3.3.

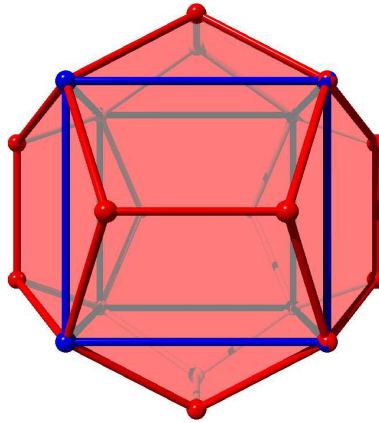


Fig. 5.3. Primera relación áurea hexaedro – dodecaedro (vértice – vértice, o también arista – cara)

A partir de la taxonomía de vértices elaborada en las secciones 3.2 y 3.3 para el dodecaedro y el hexaedro, y de las estructuras áureas expuestas en la sección 4, se observa que las aristas del hexaedro de la figura anterior se construyen mediante varillas de longitud $1/\Phi$. Por su parte, las aristas del dodecaedro utilizan varillas de longitud $1/\Phi^2$.

Por lo tanto, para esta configuración, en la que las 12 aristas del hexaedro están contenidas en las 12 caras del dodecaedro, la longitud de la arista del hexaedro es Φ veces la longitud de la arista del dodecaedro. Es decir, la longitud de ambas aristas está en proporción áurea.

Nótese que esta primera relación áurea hexaedro – dodecaedro, que en virtud de lo anterior hemos denotado como “arista – cara”, también podría denotarse como “vértice – vértice”, pues cada una de los 8 vértices del hexaedro inciden en 8 de los 20 vértices del dodecaedro.

Esta relación se puede conseguir con las construcciones áureas de la sección 4.

4. SEGUNDA RELACIÓN ÁUREA HEXAEDRO – DODECAEDRO (CARA – ARISTA)

También puede plantearse una relación “inversa”, en cierto sentido, entre ambos sólidos, en la que 6 de las 30 aristas del dodecaedro estén contenidas en las 6 caras del hexaedro, como se muestra en la siguiente figura:

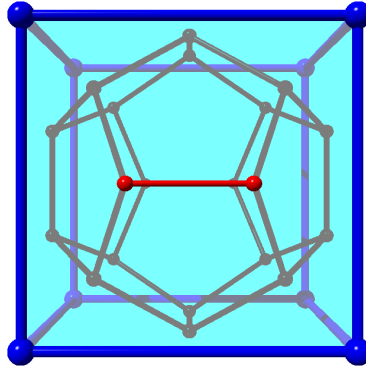


Fig. 5.4. Dodecaedro inscrito en un hexaedro

La figura muestra un dodecaedro perfectamente inscrito en un hexaedro, de manera tal que la “altura” del dodecaedro, es decir, la distancia entre dos aristas opuestas, equivale a la longitud de la arista del hexaedro, o lo que es lo mismo, a su altura.

La estructura áurea del dodecaedro, ilustrada en la sección 4.4, nos dice que su altura es igual a Φ^2 veces la longitud de su arista. Puesto que esa altura coincide con la del hexaedro que lo inscribe, se deduce que, con validez general, la longitud de la arista del hexaedro es igual a Φ^2 veces la longitud de la arista del dodecaedro inscrito.

Si suponemos que el dodecaedro mostrado en esta sección y en la precedente sea el mismo, y le asignamos a la longitud de su arista el valor 1, entonces la arista del hexaedro inscrito de la sección precedente valdrá Φ , y la arista del hexaedro que en esta sección contiene al dodecaedro valdrá Φ^2 . Por lo tanto, la longitud de la arista de ambos hexaedros, relacionados con el mismo dodecaedro, está en proporción áurea.

5. PRIMERA RELACIÓN ÁUREA HEXAEDRO – ICOSAEDRO (VÉRTICE – CARA)

Esta relación describe la configuración en la que los 8 vértices de un hexaedro inciden en los puntos medios de 8 de las 20 caras de un icosaedro.

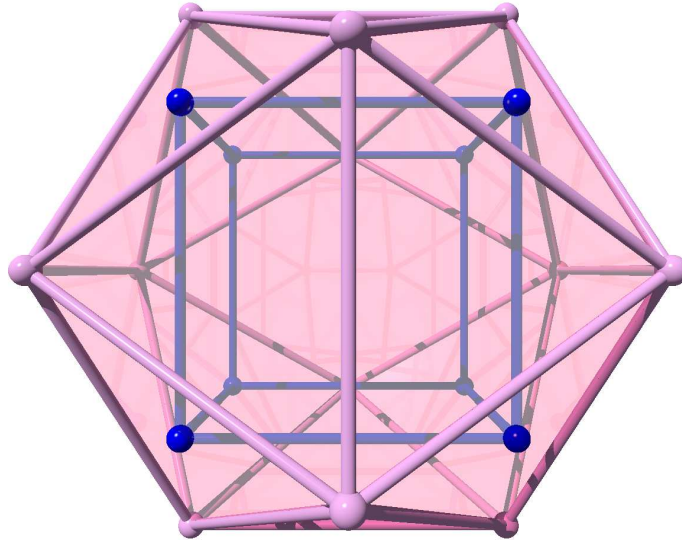


Fig. 5.5. Hexaedro inscrito en un icosaedro

Podemos calcular la relación entre la longitud de las aristas de ambos sólidos notando que el hexaedro de la figura puede considerarse como si estuviese inscrito en un dodecaedro. Y este dodecaedro lo tomamos como inscrito dualmente en el icosaedro. Vimos que el valor de la arista del hexaedro inscrito en el dodecaedro, era Φ veces el valor de la arista del dodecaedro. Se deduce, por lo tanto, que la longitud de la arista del hexaedro es $\Phi^2/3$ veces la longitud de la arista del icosaedro que lo inscribe.

6. SEGUNDA RELACIÓN ÁUREA HEXAEDRO – ICOSAEDRO (CARA – ARISTA)

Esta relación es análoga a la relación precedente entre el hexaedro y el dodecaedro, pero sustituyendo este por un icosaedro, como se muestra la siguiente figura:

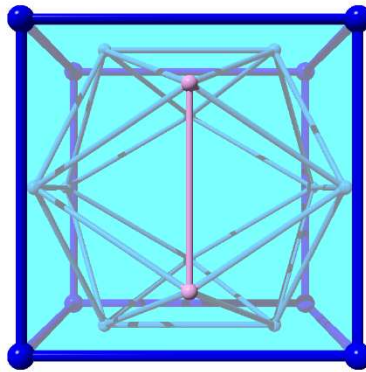


Fig. 5.6. Icosaedro inscrito en un hexaedro

Hemos visto que la longitud de la arista del dodecaedro análogo inscrito en el hexaedro era igual a la longitud de la arista del hexaedro multiplicada por Φ^2 . Notemos que la relación entre el dodecaedro y el icosaedro que ahora nos ocupa era tal que la arista del icosaedro Φ era veces el de la arista del dodecaedro.

Se deduce, por lo tanto, que la longitud de la arista del icosaedro de la figura equivale a la longitud de la arista del hexaedro dividida por Φ . Es decir, el valor de ambas aristas está en proporción áurea.

7. PRIMERA ELACIÓN ÁUREA OCTAEDRO – ICOSAEDRO (ARISTA – VÉRTICE)

Consideremos la siguiente configuración entre ambos sólidos:

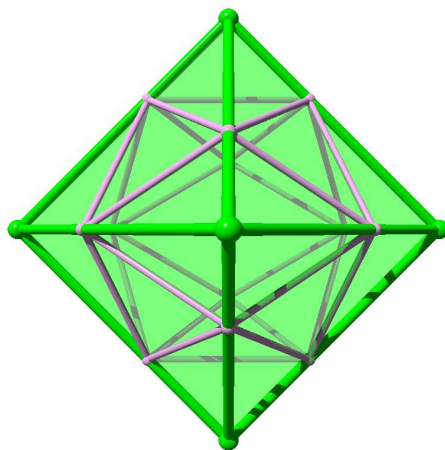


Fig. 5.7. Icosaedro inscrito en un octaedro

En ella se observa un icosaedro inscrito en un octaedro, de manera tal que 8 de sus 20 caras están contenidas en las 8 caras del octaedro, y cada uno de los 12 vértices del icosaedro incide en una de las 12 aristas del octaedro.

En la sección posterior, dedicada a la “serie platónica”, veremos que en tal configuración la longitud de la arista del icosaedro es $\sqrt{2}/\Phi^2$ veces la longitud de la arista del octaedro. Pero lo relevante de la relación entre ambos sólidos, mostrada en la figura, es que los 12 vértices del icosaedro inciden en cada una de las 12 aristas del octaedro de manera tal que las dividen en dos partes cuyas longitudes están en proporción áurea.

Podemos comprobarlo fácilmente si suponemos que en la figura anterior la longitud de la arista del octaedro sea igual a 1. La arista del icosaedro tomará, entonces, el valor $\sqrt{2}/\Phi^2$. Si observamos que en los vértices del octaedro este valor es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos son la división menor de la arista del octaedro, esta división menor tomará el valor $1/\Phi^2$. En consecuencia, la división mayor valdrá $1 - 1/\Phi^2 = 1/\Phi$, lo que muestra que ambas divisiones de la arista del octaedro están en proporción áurea.

8. SEGUNDA RELACIÓN ÁUREA OCTAEDRO – ICOSAEDRO (VÉRTICE – ARISTA)

Para calcular la relación entre la longitud de las aristas del icosaedro y del dodecaedro mostrados en la figura siguiente, conviene que los imaginemos inscritos en un hexaedro como el que se muestra en la figura 5.6, suponiendo el valor de su arista 1.

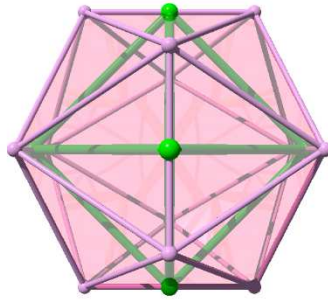


Fig. 5.8. Octaedro inscrito en un icosaedro

En relación con ese supuesto hexaedro, la arista del octaedro de la figura valdrá $1/\sqrt{2}$, en tanto que la arista del icosaedro tomará el valor $1/\Phi$. Se deduce, entonces, que el valor de la arista del icosaedro de la figura es $\sqrt{2}/\Phi$ veces el valor de la arista del octaedro.

9. PRIMERA RELACIÓN ÁUREA OCTAEDRO – DODECAEDRO (VÉRTICE– ARISTA)

Para calcular las longitudes de las aristas en la siguiente figura, vamos a seguir el mismo procedimiento que en la sección precedente, imaginando que ambos sólidos, octaedro y dodecaedro, quedasen perfectamente inscritos dentro de un hexaedro como el que se muestra en la figura 5.4, suponiendo el valor de su arista igual a 1.

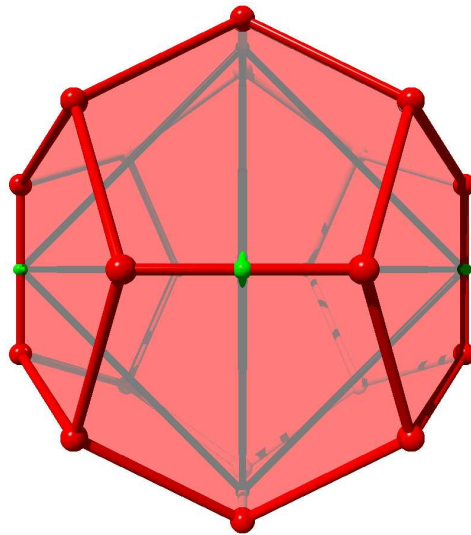


Fig. 5.9. Octaedro inscrito en un dodecaedro

En relación con ese supuesto hexaedro, la arista del octaedro de la figura valdrá $1/\sqrt{2}$, en tanto que la arista del dodecaedro tomará el valor $1/\Phi^2$. Se deduce, entonces, que el valor de la arista del icosaedro de la figura es $\sqrt{2}/\Phi^2$ veces el valor de la arista del octaedro.

10. SEGUNDA RELACIÓN ÁUREA OCTAEDRO – DODECAEDRO (ARISTA – VÉRTICE)

Tomemos en consideración la figura siguiente, análoga, en cierto sentido, a la figura 5.7:

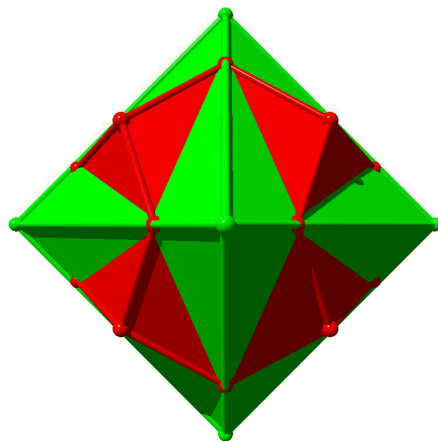


Fig. 5.10. Dodecaedro semi-inscrito en un octaedro

En ella se muestra un dodecaedro (rojo) semi-inscrito en un octaedro (verde), de tal manera que 12 de los 20 vértices del dodecaedro inciden en las 12 aristas del octaedro, en tanto que los 8 vértices restantes de aquel se elevan sobre el centro de las 8 caras del octaedro.

Si en esta configuración suponemos que la longitud de la arista del octaedro vale 1, el valor de la arista del dodecaedro será $\sqrt{2}/\Phi\sqrt{5}$. Este valor hace que los vértices del dodecaedro incidentes en las aristas del octaedro las dividan en dos partes cuya relación de proporcionalidad es Φ^2 .

Para mostrarlo, si denotamos por X la longitud de la parte mayor, entonces la de la parte menor será X/Φ^2 , siendo $X + X/\Phi^2 = 1$ ($X(1+1/\Phi^2) = 1$; $X = \Phi^2 / (\Phi^2+1)$); $X = \Phi / (\Phi+1/\Phi)$. De ahí se obtiene $X = \Phi/\sqrt{5}$.

Si observamos que en los vértices del octaedro, el valor de la arista del dodecaedro, $\sqrt{2}/\Phi\sqrt{5}$, es la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos son la división menor de la arista del octaedro, esta división menor tomará el valor $1/\Phi\sqrt{5}$, que es igual a X/Φ^2 . Ello muestra que ambas partes de la arista del octaedro tienen el valor Φ^2 como factor de proporcionalidad.

El conjunto de relaciones expuesto en las secciones anteriores pone de manifiesto que, si bien, como dijimos al comienzo de estas notas, el dodecaedro y el icosaedro son los sólidos platónicos vinculados de manera más estrecha con el número Φ , esta vinculación no es exclusiva de ellos, sino que también el hexaedro, el tetraedro² y el octaedro intervienen en configuraciones que

² Obsérvese que la combinación de dos tetraedros (en forma de octaedro estrellado) tienen sus 8 vértices comunes a los 8 vértices del hexaedro, y su arista es $\sqrt{2}$ veces la de éste. Por lo tanto, salvo este factor, tienen las mismas relaciones áureas.

hacen evidente la presencia de la proporción áurea. Por ello creemos que puede pensarse en una especie de “aureidad latente”, en estos tres sólidos, que habitualmente se vinculan de manera más directa con el número $\sqrt{2}$ que con el número Φ .

6 Series

1. SERIE ÁUREA

Planteamos a continuación una primera serie de construcción con los cinco sólidos platónicos, que hemos denominado “serie áurea”, en la que las aristas de los diferentes poliedros son:

Poliedro	Dodecaedro	Octaedro	Tetraedros	Hexaedro	Icosaedro	Dodecaedro
L. Arista	$2/3\Phi^2$	$\sqrt{2}/\Phi$	$2\sqrt{2}/\Phi$	$2/\Phi$	$2/\Phi$	$2/\Phi^2$
Ratio/Octaedro	$\sqrt{2}/3\Phi$	1	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/\Phi$
Arista*Tan (A/2)	$2/3\Phi$	$2/\Phi$	$2/\Phi$	$2/\Phi$	2Φ	$2/\Phi$

Tabla 6.1 – Características específicas de los sólidos platónicos de la serie áurea.

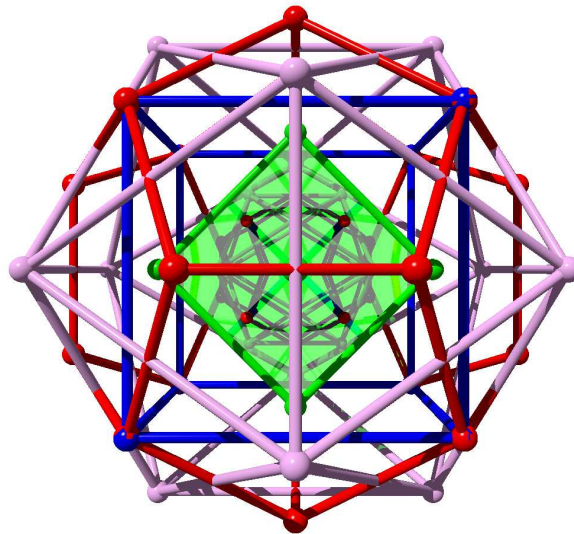


Fig. 6.1. Serie áurea – Los vértices del dodecaedro interior conectan con las 8 caras del octaedro, y las aristas de los icosaedros y de los dodecaedros (interiores y exteriores) se cortan en sus puntos medios.

Como puede verse, al movernos hacia “el interior” de la serie platónica, la longitud de la arista de un mismo poliedro se reduce en un factor 3. Inversamente, cuando recorremos la serie hacia “el exterior” la longitud de la arista aumenta en ese mismo factor, 3.

2. SERIE PLATÓNICA

Exponemos ahora una segunda serie en la que se puede formar una cadena infinita de poliedros inscritos uno en otro, que hemos bautizado como serie platónica, en la cual las aristas de los diferentes poliedros son:

Poliedro	Icosaedro	Octaedro	Tetraedros	Hexaedro	Dodecaedro	Icosaedro
L. Arista	$2/\Phi^3$	$\sqrt{2}/\Phi$	$2\sqrt{2}/\Phi$	$2/\Phi$	$2/\Phi^2$	$6/\Phi^3$
Ratio/Octaedro	$\sqrt{2}/2\Phi^2$	1	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}/\Phi$	$3\sqrt{2}/\Phi^2$
Arista*Tan(A/2)	$2/\Phi$	$2/\Phi$	$2/\Phi$	$2/\Phi$	$2/\Phi$	$6/\Phi$

Tabla 6.2 – Características específicas de los sólidos platónicos de la serie platónica.

Como puede verse, al movernos hacia “el interior” de la serie platónica, la longitud de la arista de un mismo poliedro se reduce en un factor 3. Inversamente, cuando recorremos la serie hacia “el exterior” la longitud de la arista aumenta en ese mismo factor, 3.

En esta serie, el dodecaedro y el icosaedro tienen una relación vértice-cara, el hexaedro y el icosaedro tienen una relación vértice-cara, el hexaedro y el dodecaedro tienen una relación vértice-vértice; los tetraedros y el hexaedro tienen una relación vértice-vértice; los tetraedros y el dodecaedro también tienen una relación vértice-vértice ; los tetraedros y el icosaedro una relación vértice-cara; los tetraedros y el octaedro tienen una relación arista-cara; y el octaedro y el hexaedro tienen una relación vértice-cara.

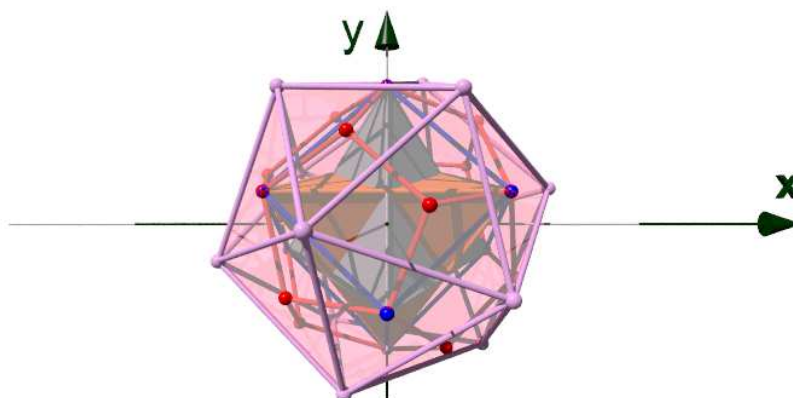


Fig. 6. 2. Serie platónica – Los vértices del dodecaedro inciden en los centros de las caras del icosaedro.

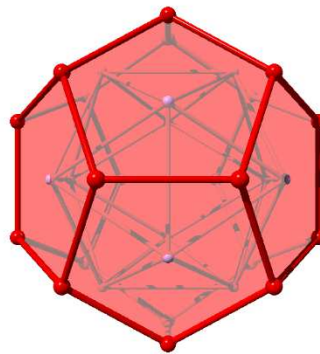
3. SERIE PLATÓNICA INVERSA

También podemos formar una tercera serie, parecida a la anterior, dejando el dodecaedro en la misma posición, pero con el icosaedro inscrito en él, el hexaedro inscrito en el icosaedro, etc. La hemos bautizado como serie platónica inversa. Las aristas de los diferentes poliedros son:

Poliedro	Dodecaedro	Octaedro	Tetraedros	Hexaedro	Icosaedro	Dodecaedro
L. Arista	$2/(3\Phi^3)$	$\sqrt{2}/\Phi^2$	$2\sqrt{2}/\Phi^2$	$2/\Phi^2$	$6/\Phi^4$	$2/\Phi^2$
Ratio/Octaedro	$\sqrt{2}/\Phi^2$	1	2	$\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}/\Phi^3$	$\sqrt{2}/\Phi$
Arista*Tan(A/2)	$2/3\Phi^2$	$2/\Phi^2$	$2/\Phi^2$	$2/\Phi^2$	$6/\Phi^2$	$2/\Phi$

Tabla 6.3 – Características específicas de los sólidos platónicos de la serie platónica inversa.

Como puede verse en los valores de esta tabla, al movernos hacia “el interior” de la serie platónica inversa, la longitud de la arista de un mismo poliedro se reduce en un factor 3Φ . Inversamente, cuando recorremos la serie hacia “el exterior” la longitud de la arista aumenta en ese mismo factor, 3Φ .



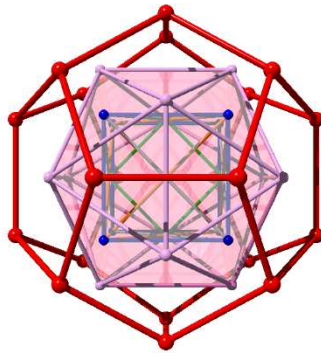


Fig. 6. 3. Serie platónica inversa – Los vértices del icosaedro son tangentes a los centros de las caras del dodecaedro.

En esta serie, el icosaedro y el dodecaedro tienen una relación vértice-cara, el hexaedro y el icosaedro tienen una relación vértice-cara; los tetraedros y el hexaedro tienen una relación vértice-vértice; los tetraedros y el icosaedro una relación vértice-cara; los tetraedros y el octaedro tienen una relación arista-cara; y el octaedro y el hexaedro tienen una relación vértice-cara.

7 Conclusiones

En los cinco sólidos platónicos pueden distinguirse propiedades que podríamos denominar “intrínsecas”, independientes de su tamaño, como las mostradas en la tabla 1.1, y otras características “relativas”, que se muestran en la tabla 1.2, que dependen de su tamaño y de la relación que se establezca entre ellos. Tanto en unas como en otras características se detecta la presencia de la proporción áurea, Φ , ligada inicialmente al dodecaedro y al icosaedro.

Hemos puesto de relieve que el hecho conocido de que el icosaedro y el dodecaedro estén fuertemente vinculados a la proporción áurea, es incompleto; el resto de los sólidos platónicos: hexaedro, octaedro y tetraedro, cuando se relacionan con el icosaedro y el dodecaedro también se vinculan a la proporción áurea número phi. Es decir, que el hexaedro, el tetraedro y el octaedro tienen una “latencia áurea” que se manifiesta al ponerlos en relación con el dodecaedro y el icosaedro.

En este documento hemos mostrado que existe una manera de construir y definir todos los vértices de todos los sólidos platónicos de manera que estén vinculados con la proporción áurea. Haciendo uso de este conocimiento hemos construido unas estructuras áureas que constituyen el armazón áureo subyacente a todos los sólidos platónicos.

Apoyándonos en el conocimiento de tales estructuras áureas, hemos planteado un conjunto de relaciones entre parejas de sólidos platónicos, en las que las longitudes respectivas de sus aristas están relacionadas estrechamente, de diferentes maneras, con la proporción áurea.

Ampliando esas relaciones, hemos establecido tres tipos de series que relacionan los cinco sólidos platónicos: la serie áurea, la serie platónica y la serie platónica inversa; unas series que dan lugar a distintas configuraciones que los vinculan entre ellos y en las que se manifiestan diferentes variedades de las relaciones entre los sólidos platónicos. Es característico de estas series poseer un “factor de escala”, como el factor de proporcionalidad entre la longitud de la arista de un mismo sólido en dos tramos consecutivos de las series. El valor de estos factores si recorremos las series hacia afuera (o hacia adentro) es 3 (o $1/3$) para las series áurea y platónica, y 3Φ (o $1/3\Phi$) para la serie platónica inversa.

En esas series se pone de manifiesto que al multiplicar la tangente de la mitad del ángulo diedro de cada sólido, $\tan(A/2)$, que es una de sus propiedades intrínsecas, por la longitud de su arista, L , que es una de sus características relativas, se obtienen los mismos valores para varios de ellos, e incluso para todos. Concretamente, en la serie platónica los cinco sólidos comparten como factor “invariante” el mismo valor de esa multiplicación, cuatro sólidos lo hacen en la serie áurea y tres sólidos comparten un mismo valor en la serie platónica inversa. Pensamos que la búsqueda y el hallazgo de otros factores invariantes puede ser relevante a la hora de establecer nuevas relaciones y series entre los sólidos platónicos.

8 Bibliografía

Forma y número

http://www.formaynumero.webuda.com/el_volumen_teoria/ico_dode.html

Implosion Group's website about Dan Winter- Sacred Geometry & Coherent Emotion, & HeartTuner + BlissTuner

<http://goldenmean.info/>

DUNLAP, R.A. (1997) "The golden ratio and the Fibonacci numbers". World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

1. VIDEOGRAFÍA

Un paseo por los sólidos platónicos - <https://www.youtube.com/watch?v=61zFpdqam2w>

Algo pasa con phi - Capítulo 8 - Los sólidos platónicos y la proporción áurea -

<https://www.youtube.com/watch?v=LngG-9Lez4w>

La geometría del Divertabah II - Platón y sus sólidos -

https://www.youtube.com/watch?v=qFU_jQEcpF8